ESERCIZIO (SFORZO NORMALE)

Una trave di ghisa ($E = 150$ GPa) di sezione rettangolare piena (base $b = 15$ cm e altezza $h = 35$ cm) avente lunghezza $L = 6$ m è soggetta ad un carico di trazione avente intensità pari a 2 000 kN e la cui retta d'azione coincide con l'asse della trave. Calcolare:

- la lunghezza finale della trave in seguito all'applicazione del carico;
- l'allungamento percentuale $\Delta L_{\%}$ della trave;
- la tensione normale σ_N agente in una generica sezione trasversale della trave.

E' possibile calcolare la lunghezza finale della trave L_f applicando la formula nota (e prestando attenzione alle unità di misura):

$$L_f = L_0\left(1+\frac{N}{EA}\right) = L_0\left(1+\frac{N}{Ebh}\right) = 6\,000 \times \left(1+\frac{2\,000\,000}{150\,000 \times 150 \times 350}\right) = 6\,001,52\ mm \tag{1}$$

Ricordando che l'allungamento percentuale $\Delta L_{\%}$ è definito come il rapporto tra allungamento ΔL e lunghezza finale L_f (moltiplicato per 100) si trova poi:

$$\Delta L_{\%} = \frac{\Delta L}{L_0}\cdot 100 = \frac{L_f - L_0}{L_0}\cdot 100 = \frac{6\,001,52 - 6\,000}{6\,000} \times 100 = 0,0253\ \% \tag{2}$$

La tensione normale σ_N (costante all'interno della generica sezione trasversale della trave) si calcola infine come rapporto tra sforzo normale N e area A della sezione trasversale:

$$\sigma_N = \frac{N}{A} = \frac{N}{bh} = \frac{2\,000\,000}{150 \times 350} = 38,1\ MPa \tag{3}$$

ESERCIZIO (MOMENTO TORCENTE)

Un albero di trasmissione realizzato in acciaio legato 34CrNiMo6 ($E = 220$ GPa) avente sezione circolare cava (con diametri esterno $D = 12$ cm ed interno $d = 6$ cm) e lunghezza $L = 1$ m è sottoposto a un momento torcente $M_t = 600$ Nm. Si chiede di calcolare:

- il valore delle tensioni tangenziali massime τ_{max} dovute al momento torcente M_t;
- la rotazione relativa φ tra le due sezione trasversali estreme dell'albero.

Tenendo presente che, per evitare il pericolo di vibrazioni torsionali, la deformata torsionale di un albero va solitamente limitata a

$$\varphi < 0.25\ \boldsymbol{gradi}/\text{metro}$$

si chiede di verificare per l'albero in esame che tale condizione sia verificata.

Il valore delle tensioni tangenziali massime τ_{max} dovute a momento torcente si calcola con la relazione (tenendo presente che la sezione della trave in questione è *circolare cava*)

$$\tau_{max} = \frac{M_t}{W_p} = \frac{M_t}{\frac{\pi D^3}{16}\left[1-\left(\frac{d}{D}\right)^4\right]} = \frac{600\,000}{\frac{\pi \times 120^3}{16} \times \left[1-\left(\frac{60}{120}\right)^4\right]} = 1,89\ MPa \tag{4}$$

La rotazione φ tra le sezioni estreme dell'albero (la cui distanza coincide con la lunghezza L dell'albero) si calcola come (si ricordi che per gli acciai si può assumere come valore del modulo di Poisson $\nu \simeq 0,3$)

$$\varphi = \frac{M_t L}{G J_p} = \frac{M_t L}{\dfrac{E}{2(1+\nu)} \cdot \dfrac{\pi(D^4 - d^4)}{32}} = \frac{600\,000 \times 1\,000}{\dfrac{220\,000}{2 \times (1+0,3)} \times \dfrac{\pi \times (120^4 - 60^4)}{32}} = 0,000372\ rad \quad (5)$$

ovvero, convertendo il risultato in gradi:

$$\varphi^\circ = \varphi^r \cdot \frac{180^\circ}{\pi} = 0,000372 \times \frac{180^\circ}{\pi} = 0,0213^\circ \quad (6)$$

Essendo l'albero lungo 1 metro, è possibile concludere che la deformata torsionale dell'albero vale $0,0213$ gradi/metro, valore circa 11,7 volte inferiore rispetto a quello massimo ammissibile di $0,25$ gradi/metro. L'albero risulta pertanto verificato a torsione.

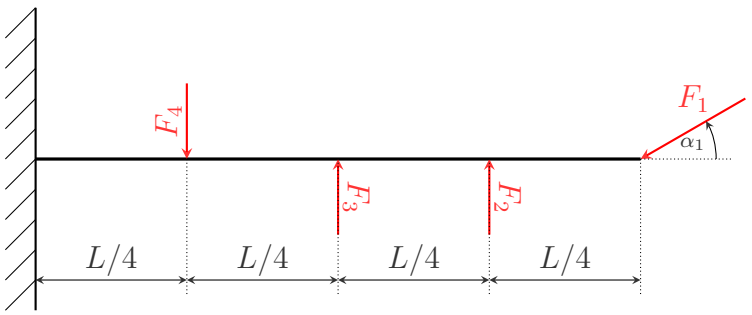
ESERCIZIO (CARATTERISTICHE DI SOLLECITAZIONE, COEFFICIENTE DI SICUREZZA E SCELTA DEL MATERIALE)

Data la seguente trave "a doppia T" (la cui sezione è stata particolareggiata) soggetta a carichi concentrati come in figura, tracciare i diagrammi delle caratteristiche di sollecitazione interna N, M_f e T. Supponendo che la trave sia realizzata in ghisa grigia (tensione di rottura $\sigma_R = 400$ MPa), si chiede di

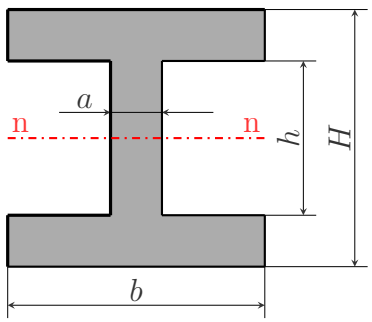
1. determinare il valore delle tensioni flessionali massime σ_{max} nella zona maggiormente sollecitata;
2. individuare la sezione della trave maggiormente sollecitata;
3. determinare se la trave collassa o meno a flessione.

Qualora la trave non dovesse verificare la condizione di resistenza, si chiede di scegliere dal catalogo seguente un materiale in grado di assicurare un coefficiente di sicurezza prossimo a 2 ($n \approx 2$) **scrivendone la denominazione**.

Materiale	$\boldsymbol{\sigma_R}$ **[MPa]**
Acciaio cementato C10	410
Acciaio cementato 12NiCr3	551
Acciaio bonificato C40	621
Acciaio cementato 16MnCr5	708
Acciaio bonificato 41Cr4	780
Acciaio bonificato 40NiCrMo2	1400
Acciaio bonificato 39NiCrMo	1500
Acciaio bonificato 40NiCrMo7	1600



$L = 12$ m
$F_1 = 300$ N
$F_2 = 600$ N
$F_3 = 900$ N
$F_4 = 400$ N
$\alpha_1 = 30^\circ$



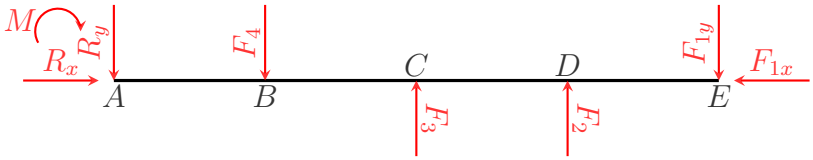
$H = 50$ mm

$h = 38$ mm

$b = 40$ mm

$a = 6$ mm

Per tracciare i diagrammi delle caratteristiche della sollecitazione interna (sforzo normale, momento flettente e taglio) è necessario, innanzitutto, calcolare intensità e verso delle 3 reazioni che l'incastro esercita sulla trave (reazione orizzontale R_x, reazione verticale R_y e momento di incastro M). Scrivendo dunque le equazioni cardinali della statica per la trave in questione si trovano i seguenti valori:



- **equilibrio in direzione orizzontale**

$$R_x - F_{1x} = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad R_x = F_{1x} = F_1 \cos\alpha_1 = 300 \times \cos(30°) = 259,81\ N \tag{7}$$

- **equilibrio in direzione verticale**

$$\begin{aligned} -R_y - F_4 + F_3 + F_2 - F_{1y} = 0 \implies R_y &= -F_4 + F_3 + F_2 - F_1 \sin\alpha_1 \\ &= -400 + 900 + 600 - 300 \times \sin(30°) = 950\ N \end{aligned} \tag{8}$$

- **equilibrio alla rotazione intorno al punto d'incastro**

$$M + F_4\frac{L}{4} - F_3\frac{L}{2} - F_2\frac{3L}{4} + F_{1y}L = 0 \quad \Longrightarrow \quad M = -F_4\frac{L}{4} + F_3\frac{L}{2} + F_2\frac{3L}{4} - F_1 \sin\alpha_1 L$$

$$M = -400 \times 3 + 900 \times 6 + 600 \times 9 - 300 \times \sin(30°) \times 12 = 7\,800\ Nm \tag{9}$$

Di seguito vengono riportati i calcoli relativi al tracciamento dei diagrammi di N, M_f e T.
Sforzo normale N:
Essendo presenti unicamente due forze orizzontali R_x e F_{1x} (aventi la medesima intensità) agli estremi che tendono a "comprimere" la trave, quest'ultima sarà sottoposta a uno sforzo normale di compressione costante (negativo) per tutta la sua lunghezza di intensità pari a

$$N_A = N_B = N_C = N_D = N_E = R_x = F_{1x} = -259,81\ N \tag{10}$$

Essendo lo sforzo normale negativo (compressione), il diagramma di N dovrà essere rappresentato al di sopra dell'asse della trave.

Momento flettente M_f:

$$M_{f,E} = 0\ Nm \tag{11}$$

$$M_{f,D} = -F_{1y}\frac{L}{4} = -300 \times \sin(30°) \times 3 = -450\ Nm \tag{12}$$

$$M_{f,C} = -F_{1y}\frac{L}{2} + F_2\frac{L}{4} = -300 \times \sin(30°) \times 6 + 600 \times 3 = 900\ Nm \tag{13}$$

$$M_{f,B} = -F_{1y}\frac{3L}{4} + F_2\frac{L}{2} + F_3\frac{L}{4} = -300 \times \sin(30°) \times 9 + 600 \times 6 + 900 \times 3 = 4\,950\ Nm \tag{14}$$

$$\begin{aligned} M_{f,A} &= -F_{1y}L + F_2\frac{3L}{4} + F_3\frac{L}{2} - F_4\frac{L}{4} = -300 \times \sin(30°) \times 12 + 600 \times 9 + 900 \times 6 - 400 \times 3 \\ &= 7\,800\ Nm \end{aligned} \tag{15}$$

Il diagramma del momento flettente è lineare a tratti e si costruisce congiungendo in successione i punti $M_{f,A}$, $M_{f,B}$, $M_{f,C}$, $M_{f,D}$ e $M_{f,E}$ e tenendo presente che

- i momenti flettenti negativi vanno rappresentati al di sopra dell'asse della trave;
- i momenti flettenti positivi vanno rappresentati al di sotto dell'asse della trave.

Taglio T:
Ricordando che il taglio nei tratti $A-B$, $B-C$, $C-D$ e $D-E$ della trave può essere visto, rispettivamente, come il coefficiente angolare dei segmenti $\overline{IH}$, $\overline{HG}$, $\overline{GF}$ e $\overline{FE}$ del diagramma del momento flettente, è possibile calcolare il valore che esso assume nei vari tratti di trave tenendo presente che, per determinarne il segno, è sufficiente applicare la seguente semplice regola:

- nei tratti di trave in cui il diagramma del momento flettente presenta una pendenza $\searrow$ il taglio è positivo (come ad esempio accade nel tratto $D-E$);
- nei tratti di trave in cui il diagramma del momento flettente presenta una pendenza $\nearrow$ il taglio è negativo (come ad esempio accade nei tratti $A-B$, $B-C$ e $C-D$);
- nei tratti di trave in cui il diagramma del momento flettente presenta una pendenza $\rightarrow$ il taglio è nullo.

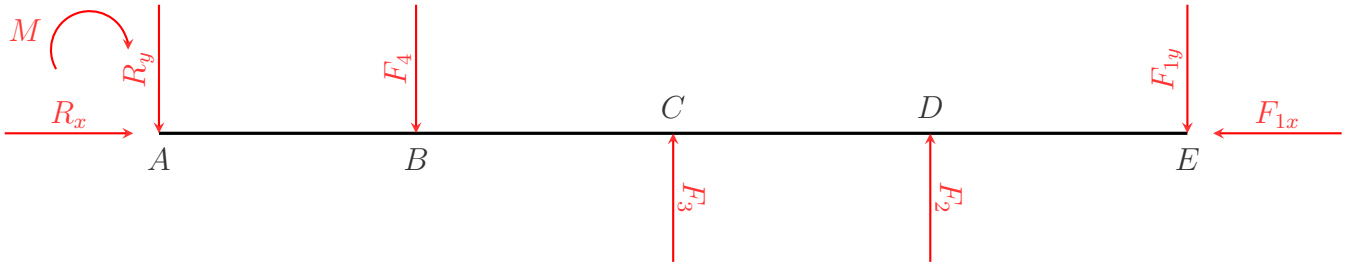
Di seguito vengono riportati i calcoli relativi al taglio nei vari tratti di trave (per non confondersi con i segni, è buona regola valutare i momenti flettenti presi in **valore assoluto** e, una volta svolti i calcoli, attribuire il segno in del taglio in base alle considerazione precedentemente effettuate).

$$T_{D-E} = \frac{\overline{FD}}{\overline{DE}} = \frac{|M_{f,D}|}{\frac{L}{4}} = \frac{450}{3} = +150\ N \tag{16}$$

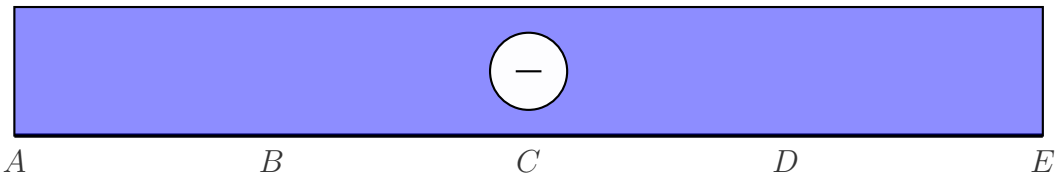
$$T_{C-D} = \frac{\overline{FJ}}{\overline{CD}} = \frac{\overline{FD} + \overline{DJ}}{\overline{CD}} = \frac{|M_{f,D}| + |M_{f,C}|}{\frac{L}{4}} = \frac{450 + 900}{3} = -450\ N \tag{17}$$

$$T_{B-C} = \frac{\overline{GK}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{BH} - \overline{CG}}{\overline{BC}} = \frac{|M_{f,B}| - |M_{f,C}|}{\frac{L}{4}} = \frac{4\,950 - 900}{3} = -1\,350\ N \tag{18}$$

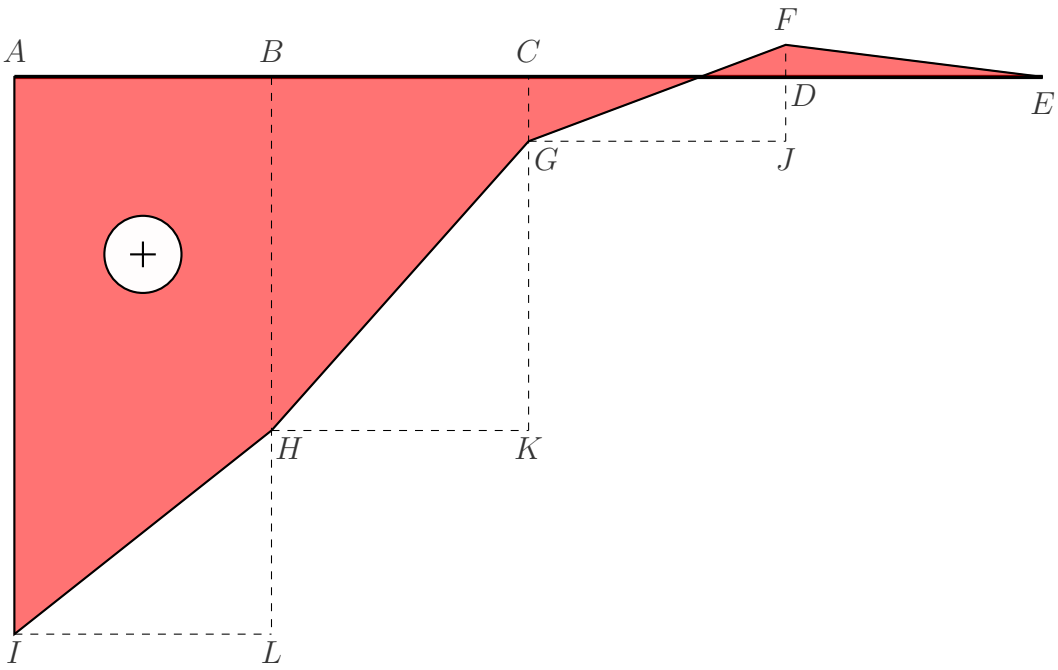
Trave sottoposta al caricamento



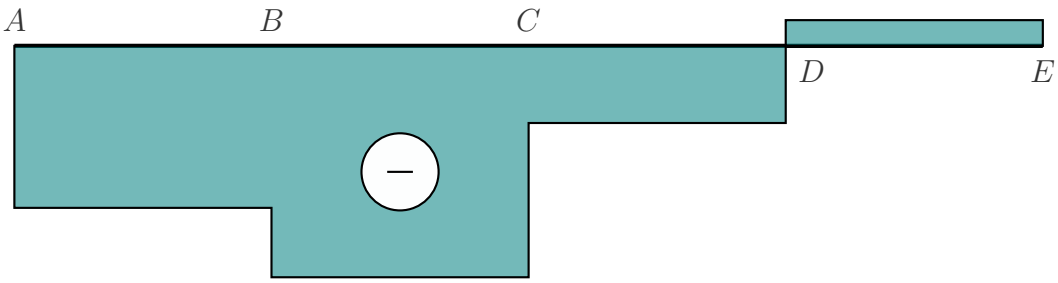
Sforzo normale



Momento flettente



Taglio



$$T_{A-B} = \frac{\overline{HL}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AI} - \overline{BH}}{\overline{AB}} = \frac{|M_{f,A}| - |M_{f,B}|}{\frac{L}{4}} = \frac{7\,800 - 4\,950}{3} = -950\ N \tag{19}$$

Nel tracciare il diagramma del taglio è bene ricordare che quest'ultimo va rappresentato al di sopra dell'asse della trave quando positivo e al di sotto dell'asse della trave quando negativo. Nella pagina seguente sono riportati i diagrammi richiesti dalla consegna.
Come si evince dal diagramma di M_f, la sezione maggiormente sollecitata della trave è la sezione A: in corrispondenza di tale sezione, pertanto, le tensioni flessionali massime sono date da

$$\sigma_{max} = \frac{M_{f,A}}{W} \tag{20}$$

Il modulo di resistenza W si può calcolare applicando la definizione:

$$\begin{aligned} W &= \frac{\text{momento d'inerzia della sezione rispetto l'asse n-n}}{\text{distanza massima della sezione dall'asse n-n}} \\ &= \frac{J_{n-n}}{\frac{H}{2}} = \left[\frac{bH^3 - h^3(b-a)}{12}\right] \cdot \frac{2}{H} = \left[\frac{40 \times 50^3 - 38^3 \times (40-6)}{12}\right] \times \frac{2}{50} = 10\,447,84\ mm^3 \end{aligned} \tag{21}$$

E' possibile, a questo punto, calcolare σ_{max} (si presti attenzione all'unità di misura di M_f):

$$\sigma_{max} = \frac{M_{f,A}}{W} = \frac{7\,800\,000}{10\,447,84} = 746,57\ MPa \tag{22}$$

Essendo la trave realizzata in ghisa grigia (tensione di rottura $\sigma_R = 400$ MPa), si osserva che

$$\sigma_{max} = 746,57\ MPa > \sigma_R = 400\ MPa \tag{23}$$

pertanto la trave non è in grado di sopportare il caricamento assegnato (ovvero collassa).
Ricordando la definizione di *coefficiente di sicurezza*

$$n = \frac{\sigma_R}{\sigma_{max}} \tag{24}$$

calcoliamo per ciascuno dei materiali proposti il coefficiente di sicurezza e, infine, scegliamo il materiale che presenta il valore di n più prossimo a 2:

- Acciaio cementato C10:

$$n = \frac{\sigma_{R,C10}}{\sigma_{max}} = \frac{410}{746,57} = 0,549 \tag{25}$$

- Acciaio cementato 12NiCr3:

$$n = \frac{\sigma_{R,12NiCr3}}{\sigma_{max}} = \frac{551}{746,57} = 0,738 \tag{26}$$

- Acciaio bonificato C40:

$$n = \frac{\sigma_{R,C40}}{\sigma_{max}} = \frac{621}{746,57} = 0,832 \tag{27}$$

- Acciaio cementato 16MnCr5:

$$n = \frac{\sigma_{R,16MnCr5}}{\sigma_{max}} = \frac{708}{746,57} = 0,949 \tag{28}$$

- Acciaio bonificato 41Cr4:

$$n = \frac{\sigma_{R,41Cr4}}{\sigma_{max}} = \frac{780}{746,57} = 1,045 \tag{29}$$

- Acciaio bonificato 40NiCrMo2:

$$n = \frac{\sigma_{R,40NiCrMo2}}{\sigma_{max}} = \frac{1\,400}{746,57} = 1,875 \tag{30}$$

- Acciaio bonificato 39NiCrMo:

$$n = \frac{\sigma_{R,39NiCrMo}}{\sigma_{max}} = \frac{1\,500}{746,57} = 2,009 \tag{31}$$

- Acciaio bonificato 40NiCrMo7:

$$n = \frac{\sigma_{R,40NiCrMo7}}{\sigma_{max}} = \frac{1\,600}{746,57} = 2,143 \tag{32}$$

Dai calcoli svolti si osserva che solamente gli ultimi due acciai presentano un coefficiente di sicurezza non inferiore a 2: in particolare, essendo rischiesto un coefficiente di sicurezza il più possibile prossimo a 2, per la trave in questione si sceglierà l'acciaio 39NiCrMo.